CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” - EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22.03.2014

CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Dacă $z = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$, atunci valoarea produsului $P = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots(1+z^{2014})$este:

A.$2^{671} \cdot z$; B. $2^{672} \cdot z^2$; C. $-2^{671} \cdot z^2$; D. 2^{671}.

2.Ecuaţia: $lgx = \left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right]$ are:

A. o soluţie; ; B .2 soluţii ; C. trei soluţii; D. mai multe soluţii.

3.Soluţia inecuaţiei $log_{\frac{x+4}{2}}\left(log_2\frac{2x-1}{3+x}\right) < 0$ este:

A. (-4;-3); B. (4; +∞); C. (-3;-2); D. (-4;-3)∪(4; +∞);

4.Suma $arctg\frac{1}{7} + arctg\frac{1}{3}$ este egală cu:

A. $arctg\frac{1}{2}$; B. $arctg\frac{10}{21}$; C. $arctg\frac{4}{21}$; D. $arctg\frac{1}{4}$.

5.Egalitatea: $\sqrt[3]{7 - a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + a\sqrt{2}} = 2$, este adevărată, pentru următoarele valori ale lui *a*:

A. 4 și -4; B. 5; C. +3. D. 5 și -5;

Probleme propuse de prof. Gabriel TICA

Partea a II –a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Să se determine $n \in \boldsymbol{N}, n \geq 2$ pentru care

$$\sqrt[n]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[n]{49 - 20\sqrt{6}} = \sqrt[n]{144}.$$

Prof. Ionel Tudor, Călugăreni–Sfera Matematicii nr.22

Problema 2 (20 puncte)

Fie $x, y, z > 1$. Să se aratecă

$$\log_x \frac{y^2+z^2+y+z}{4} + \log_y \frac{z^2+x^2+z+x}{4} + \log_z \frac{x^2+y^2+x+y}{4} > \frac{9}{2}.$$

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute ; Din oficiu se acordă: 10 puncte

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a X-a

Partea I

1. C; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** D

Partea a II-a

Problema 1 (20 puncte)

$49+20\sqrt{6}=\left(5+\sqrt{24}\right)^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\right)^2==\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4$ ……..3p

$49-20\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$, $144=12^2=\left(\sqrt{12}\right)^4=\left(2\sqrt{3}\right)^4$…………………..3p

Ecuaţia se scrie

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{n}}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{n}}=\left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{n}}$, ...3p

sau, cu notaţia $x=\frac{4}{n}$, obținem $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=\left(2\sqrt{3}\right)^x$………….

$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^x=1.\ (*)$……………………………..3p

Dacă $=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, atunci$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=1-a$. Deoarece $\frac{1}{2}<a<1$, avem şi $0<1-a<a<1$ ……..2p

Atunci,funcţia $f(x)=a^x+(1-a)^x$ este strict descrescătoare pe **R** ca sumă a două funcţii exponenţiale strict descrescătoare pozitive..2p

Rezultă că ecuaţia $(*)$ are cel mult o soluţie...2p

Cum x=1 verifică ecuaţia , avem soluţia unică pentru ecuaţia din enunţ n=4………………..2p

Problema 2 (20 puncte)

$\frac{y^2+z^2+y+z}{4}\geq\sqrt[4]{y^3z^3}.(*)$ 5p

$\log_x\frac{y^2+z^2+y+z}{4}\geq\frac{3}{4}\left(\log_x y+\log_x z\right)$ 5p

$\left(\log_x y+\log_y x\right)+\left(\log_y z+\log_z y\right)+\left(\log_x z+\log_z x\right)\geq 6$ 5p

Găsirea inegalității și justificarea că este strictă 5p