CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 40$ este egală cu:

a)0; **b)**1; **c)**2; **d)**3.

2.Numărul maxim de plane determinate de cinci puncte necoplanare este a iar numărul maxim de drepte determinate de alte cinci puncte este b. Numărul $a - b$ are valoarea:

a)3; **b)**2; **c)**1; **d)** 0.

3.Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ este.:

a)$\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 2 **d)** $4\sqrt{2}$.

4.Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $[a, b] \cap \left[\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2}\right] = [1,3]$. Valoarea produsului $a \cdot b$ este egală cu:

a) -6 **b)** 3 **c)** -3 **d)** 6

5.Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Măsura unghiului format de planul $(A'BC)$ cu planul $(C'BD)$ este egală cu:

a) 90º **b)** 45º **c)** 60º **d)** 72º

Partea a II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 şi 2 scrieţi pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

În triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, mediatoarea laturii [AB] intersectează pe (BC) în punctul T. În punctul A construim $DA \perp (ABC)$ si notăm cu P, respectiv Q proiectiile punctului A pe dreptele DT, respectiv DC. Demonstrați că punctele B, P, Q sunt coliniare.

Prof. Ionel Tudor ,Giurgiu, G.M. 5/2009,

Problema 2 (20 puncte)

Aratați că $\dfrac{2(x+y)}{3} + \dfrac{1}{3xy} + \dfrac{3}{x+y} \geq 3$, pentru orice numere reale strict pozitive x și y.

Prof. Ionut Ivănescu, „Sfera Matematicii” nr.1 (2008-2009)

Timp de lucru: 2 ore 30 minute. Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a VIII-a

Partea I

1. a); **2.**d);**3.** c; **4.** -3); **5.** a)

Partea a II-a

Problema 1

Aplicand T catetei: $AD^2 = DP \cdot DT$ si $AT^2 = PT \cdot DT$................4p

$\frac{DP}{PT} = \frac{AD^2}{AT^2}$..2p

Analog$\frac{CQ}{QD} = \frac{AC^2}{AD^2}$..2p

$\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT}{BC} \cdot \frac{AC^2}{AD^2} \cdot \frac{AD^2}{AT^2} = \frac{BT \cdot AC^2}{BC \cdot AT^2}$...(1)..................................1p

$\Delta ABC \sim \Delta TAB, \frac{AC}{BT} = \frac{BC}{AB}$.........(2)......................................2P

AT=TB.........(3)..2P

$AC^2 = BC \cdot BT$...2p

$\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT \cdot BT \cdot BC}{BC \cdot BT^2}$..3p

Aplicand reciproca T. Menelaus in ΔDCT, pentru punctele B, P, Q, obtinem concluzia..2p

Problema 2

$\frac{2}{3}(x + y) + \frac{1}{3x\square} + \frac{3}{x+y} = \frac{x+y}{3} + \frac{3}{x+y} + \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3x\square}$ 2p

$\frac{x+y}{3} + \frac{3}{x+y} \geq 2$...2p

Se arată că $\frac{x+y}{3} + \frac{3}{3x\square} \geq 1$, xy(x+y)+1≥ $3xy$.....................2p

$x + y = s,\ xy = p.$ Inegalitatea devine: ps+1≥ $3p$.......2p

Este suficient sa dem. că $2p\sqrt{p} + 1 \geq 3p$......................2p

Notam $p = t^2$ cu $t > 0$, Inegalitatea devine $2t^3 + 1 \geq 3t^2$........2p

$(t - 1)(2t^2 - t - 1) \geq 0$ 3p

$(t - 1)^2(2t + 1) \geq 0$ relatie adevarata..............................3p

Finalizare 2p