CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A XI-A

BĂILEȘTI, 22 MARTIE 2014

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$ și numerele $a = \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$ *și* $b = \sqrt{n - 2\sqrt{n-1}}$. Partea fractionară a numărului $\frac{a}{b}$ este egală cu:

a) $\frac{2}{\sqrt{n-1}-1}$; **b)** $\frac{2}{\sqrt{n-1}+1}$ **c)** 0 **d)** $\frac{1}{2}$

2. Pe latura [BC] a triunghiului ABC se consideră punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{2014}$, în aceasta ordine, de la B spre C. Ele împart segmentul [BC] în 2015 segmente egale. Dacă $\overrightarrow{AP_5} = m\cdot\overrightarrow{AB} + n\cdot\overrightarrow{AC}$, atunci m este egal cu:

a) $\frac{403}{402}$ **b)** $\frac{402}{403}$ **c)** $\frac{401}{403}$ **d)** $1\frac{401}{402}$

3. Negația propoziției “ *Toți suedezii sunt blonzi și au ochii albaștri*“ este:

a) Există un suedez care nu este blond și nu are ochii albaștri.
b) Există un suedez care nu este blond sau nu are ochii albaștri.
c) Nici un suedez nu este blond sau nu are ochii albaștri.
d) Toți suedezii nu sunt blonzi sau nu au ochii albaștri.

4. Un pătrat cu latura de 10 cm este împărțit în 100 de patrățele egale cu latura de 1cm fiecare. Numărul total de pătrate care se formează este egal cu:

a) 275 **b**) 485 **c**) 2014 **d**) 385

5. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $[2\cdot a - 3,\ b + 3] \cap [b - 2\cdot a,\ 3\cdot a + 1] = [-1, 4]$. Atunci valoarea sumei $a + b$ este egală cu:

a) 0 **b**) -1 **c)** 2 **d**) -3

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 şi 2 scrieţi pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Fie $a, b, c \in [1, +\infty)$ astfel incat $a\cdot b\cdot c = 8$. Aflati cea mai mare valoare a raportului

$$E = \frac{a+b+c-a\cdot b-b\cdot c-c\cdot a+7}{(a+b+c)^6}.$$

Prof. Ionuț Ivănescu, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

Fie ABC un triunghi cu proprietatea că triunghiul format cu medianele sale este ascuțit-unghic. Demonstrați că se poate construi un triunghi cu înălțimile triunghiului ABC.

Prof. Laurentiu Panaitopol, Gazeta Matematică nr.1/2006

Timp de lucru: 2 ore 30 minute. Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a IX-a

Partea I

1. a); **2.**b);**3.** b; **4.** d); **5.** c)

Partea a II-a

Problema 1

Notam$x = a - 1 \geq 0, y = b - 1 \geq 0,\ z = c - 1 \geq 0$…………………………..4p
Aplicandsuccesivinegalitateamediilorobtinem:
$(x + y + z + 3)^6 \geq \left(3\sqrt[3]{xyz} + 3\right)^6 = 3^6\left(\sqrt[3]{xyz} + 1\right)^6 \geq 3^6\left(2\sqrt[6]{xyz}\right)^6 = 6^6 xyz$…….4p

$\frac{(x+y+z+3)^6}{xyz} \geq 6^6, \quad \frac{xyz}{(x+y+z+3)^6} \leq \frac{1}{6^6}$……………………………….4p
$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{(a+b+c)^6} \leq \frac{1}{6^6}, \ \frac{abc+a+b+c?}{(a+b+c)^6} \leq \frac{1}{6^6}$……………….4p
Cum abc=8
Max E=$\frac{1}{6^6}$………………………………………………..……4p
Obs Max E se atinge pentru a=b=c=2

Problema 2

Fie $a \leq b \leq c, atunci,\ m_a \geq m_b \geq m_c, si\ h_a \geq h_b \geq h_c$………4p
Triunghiul medianelor ascutitunghic implica $m_a^2 < m_b^2 + m_c^2$ ...…..4p
$5a^2 > b^2 + c^2$………………….2p
$h_a < h_b + h_c$, deci $\frac{S}{a} < \frac{S}{b} + \frac{S}{c}$ sau $a > \frac{bc}{b+c}$…………………….4p
Este suficient sa arătăm că $\frac{b^2+c^2}{5} \geq \frac{b^2c^2}{(b+c)^2}$
sau $(b^2 + c^2)(b + c)^2 \geq 5b^2c^2$……………………………………….4p

Dar $(b^2 + c^2) \geq 2bc$ iar $(b + c)^2 \geq 4bc$……………………..2p
Finalizare……………………………………………………2p