CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A IX-A

BĂILEȘTI, 24 MARTIE 2012

CLASA a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Fie $a \in C^*$. Dacă $z_1(z_2+z_3) = z_2(z_3+z_1) = z_3(z_1+z_2) = a$ atunci $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ este:

a) 1 b) $\frac{3|a|}{2}$ c) $\frac{|a|}{3}$ d) $3|a|$

2. Fie $m \in R$ astfel încât ecuația $9^{|x|} - 10 \cdot 3^{|x|} + m = 0$ are exact trei rădăcini reale şi S suma pătratelor celor trei rădăcini. Atunci:

a) $S=9$ b) $S=1$ c) $S=19$ d) $S=8$.

3. Dacă $\log_2 5 = a$ atunci $\log_5 200$ este egal cu:

a) $\frac{2a+3}{a}$ b) $\frac{3a+2}{a}$ c) $\frac{a+3}{2a}$ d) $n = \frac{2a+3}{3a}$

4. Considerăm funcția $f: R \to [m,\infty)$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $m \in R.$ Dacă funcția f este surjectivă, atunci:

a) $m \le -\frac{1}{3}$ b) $m=0$ c) $m = \frac{2}{3}$ d) $m = \frac{1}{3}$

5. Fie $k \in N, k \ge 2$ şi $x_1, x_2, ..., x_k > 0$ astfel încât $\sqrt[3]{[x_1] \cdot [x_2] \cdot ... \cdot [x_k]} = \frac{1}{\{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_k\}}$.

Dacă $\{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_k\} \in N$ şi $S = x_1 + x_2 + ... + x_k$ atunci

a) $S=k$ b) $S=k+1$ c) $S=k+2$ d) $S=1$

Probleme propuse de prof. Cătălin Cristea, Craiova

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 şi 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Fie $a \in C^*$ şi $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_1 z_2 z_3 = a^3$, $\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} + \sqrt{|z_3|} = 3\sqrt{|a|}$.

a) Găsiți z_1, z_2, z_3 ,distincte două câte două, care verifică ipotezele;

b) Demonstrați că $\sqrt{(1+|z_1|)(1+|z_2|)} + \sqrt{(1+|z_2|)(1+|z_3|)} + \sqrt{(1+|z_3|)(1+|z_1|)} \ge 3 + 3|a|$.

Prof. Cătălin Cristea, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

Determinați valorile lui k pentru care ecuația $C_{x^2-kx+3}^{x} = C_{x^2-kx+3}^{k}$ are trei soluții.

Prof. Florentin Visescu, Sfera Matematicii nr.19

Timp de lucru 2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.