CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA” EDIȚIA A IX-A

BĂILEŞTI, 24 MARTIE 2012

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Fie funcția $f:(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\frac{m\,x^2+[x]}{|x|}, m\geq 3$ ([x] este partea întreagă a lui x). Atunci preimaginea lui 1 prin funcția f are:

a) 0 elemente, b) 1 element, c) 2 elemente, d) o infinitate de elemente,

2. Se consideră mulțimea $A_m=\{n\in\mathbb{N}^*\,|\,n=m\left[\sqrt{n-1}\right]+2\}, m\in\mathbb{N}^*$ ($\left[\sqrt{n-1}\right]$ este partea întreagă a lui n-1). Numărul de elemente al mulțimii A_m este:

a) 0 elemente, b) 1 element, c) 2 elemente, d) o infinitate de elemente.

3. Considerăm expresia $E(x)=\left|x-\frac{1}{5}\right|+\left|x-\frac{2}{5}\right|+\left|x-\frac{3}{5}\right|+\left|x-\frac{4}{5}\right|, x\in\mathbb{R}$. Atunci minimul expresiei se atinge pentru orice x din intervalul:

a) $\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right]$ b) $\left[\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right]$ c) $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ d) $\left[\frac{4}{5};+\infty\right)$

4. Rezultatul calculului $77+7777+\cdots+\underbrace{7\cdots7}_{de\ 2012\ ori}$ este

a) $\frac{7}{10}\left[\frac{10^{2012}-1}{99}-1005\right]$ b) $\frac{7}{10}\left[\frac{10^{2012}-10^2}{99}-1006\right]$

c) $\frac{7}{9}\left[\frac{10^{2014}-10^2}{99}-1006\right]$ d) $\frac{7}{9}\left[\frac{10^{2012}-10^2}{99}-1006\right]$

Probleme propuse de prof. Claudiu Ciulcu, Craiova

5. Se consideră un triunghi ABC şi punctul P situat pe (BC). Dacă $7\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, atunci valoarea raportului $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ este:

a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{4}{3}$, c) $\frac{3}{7}$, d) $\frac{5}{4}$,

Sfera Matematicii nr.17

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 şi 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

Fie $a_1,a_2,\cdots,a_n\in(0,+\infty)$ cu $a_1a_2\cdots\ a_n=1$. Arătați că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a_1^2(a_2+a_3+\cdots+a_n)}+\frac{1}{a_2^2(a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1)}+\cdots+\frac{1}{a_n^2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}\geq\frac{n^4}{(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)^3}.$$

Prof. Claudiu Ciulcu, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

a) Aratati ca ΔABC este echilateral daca si numai daca $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$ unde I este centrul cercului inscris triunghiului ABC, iar D, E si F punctele de tangenta ale acestui cerc cu laturile (BC), (AC) respectiv (AB).

b) Aratati ca ΔABC este echilateral daca si numai daca $\overrightarrow{I_AM}+\overrightarrow{I_AP}-\overrightarrow{I_AN}=\vec{0}$ unde I_A este centrul cercului exinscris în ΔABC (intersectia dintre bisectoarea interioara a unghiului ∢A si bisectoarele exterioare ale unghiurilor ∢B si ∢C) iar M, N, P punctele de tangenta ale cercului exinscris cu (AC, (BC) respectiv (AB.

Prof. Lucian Tuțescu, Craiova

Timp de lucru 2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.